TEMA 6 – FUNCIONS TRIGONOMÈTRIQUES, EXPONENCIALS I LOGARÍTMIQUES

Composició de funcions

1. Donades les funcions $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$ i $g(x)=\sqrt{2x-1}$ calcula:

a. $f\circ g(5)=f(g(3))=f(\sqrt{2\cdot 5-1})=f(\sqrt{9})=f(3)=\frac{3-1}{3^2}=\frac{2}{9}$

b. $f\circ g(x)=f(g(x))=f(\sqrt{2x-1})=\frac{\sqrt{2x-1}-1}{(\sqrt{2x-1})^2}=\frac{\sqrt{2x-1}-1}{2x-1}$

c. $g\circ f(x)=g(f(x))=g(\frac{x-1}{x^2})=\sqrt{2\frac{x-1}{x^2}-1}=\sqrt{\frac{2x-2}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}=\sqrt{\frac{-x^2+2x-2}{x^2}}=\frac{\sqrt{-x^2+2x-2}}{x}$

d. $f\circ f(x)=\ f(f(x))=f(\frac{x-1}{x^2})=\frac{\frac{x-1}{x^2}-1}{(\frac{x-1}{x^2})^2}=\frac{\frac{-x^2+x-1}{x^2}}{\frac{x^2-2x+1}{x^4}}=\frac{(-x^2+x-1)x^4}{(x^2-2x+1)x^2}=\frac{(-x^2+x-1)x^2}{x^2-2x+1}$

e. $g\circ g(x)=g(g(x))=g(\sqrt{2x-1})=\sqrt{2\sqrt{2x-1}-1}$

2. Donades les funcions $f(x)=x^2-3x$ i $g(x)=\frac{2}{x}$ calcula:

a. $f\circ g(x)=\ f(g(x))=f(\frac{2}{x})=(\frac{2}{x})^2-3(\frac{2}{x})=\frac{4}{x^2}-\frac{6}{x}=\frac{4-6x}{x^2}$

b. $g\circ f(x)=\ g(f(x))=g(x^2-3x)=\frac{2}{x^2-3x}$

c. $f\circ f(x)=\ f(f(x))=f(x^2-3x)=(x^2-3x)^2-3(x^2-3x)=x^4-6x^3+9x^2-3x^2+9x=$
$=x^4-6x^3+6x^2+9x$

d. $g\circ g(x)=g(g(x))=g(\frac{2}{x})=\frac{2}{\frac{2}{x}}=\frac{2x}{2}=x$

3. Donades les funcions $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ i $g(x)=x+2$ calcula:

a. $f\circ g(x)=\ f(g(x))=f(x+2)=\sqrt{(x+2)^2+1}=\sqrt{x^2+4x+4+1}=\sqrt{x^2+4x+5}$

b. $g\circ f(x)=\ g(f(x))=g(\sqrt{x^2+1})=\sqrt{x^2+1}+2$

c. $f\circ f(x)=\ f(f(x))=f(\sqrt{x^2+1})=\sqrt{(\sqrt{x^2+1})^2+1}=\sqrt{x^2+1+1}=\sqrt{x^2+2}$

d. $g\circ g(x)=\ g(g(x))=g(x+2)=(x+2)+2=x+4$

4. Donades les funcions $f(x)=3x^2+x$ i $g(x)=\frac{2x+1}{x}$ calcula:

a. $f\circ g(x)=f(g(x))=f(\frac{2x+1}{x})=3(\frac{2x+1}{x})^2+(\frac{2x+1}{x})=\frac{3(4x^2+4x+1)}{x^2}+\frac{2x+1}{x}=\frac{14x^2+13x+3}{x^2}$

b. $g\circ f(x)=\ g(f(x))=g(3x^2+x)=\frac{2(3x^2+x)+1}{3x^2+x}=\frac{6x^2+2x+1}{3x^2+x}$

c. $f\circ f(x)=\ f(f(x))=f(3x^2+x)=3(3x^2+x)^2+(3x^2+x)=27x^4+6x^3+4x^2+x$

d. $g\circ g(x)=\ g(g(x))=g(\frac{2x+1}{x})=\frac{2(\frac{2x+1}{x})+1}{(\frac{2x+1}{x})}=\frac{\frac{5x+2}{x}}{\frac{2x+1}{x}}=\frac{5x+2}{2x+1}$

Funció inversa o recíproca

5. Calcula la funció inversa de $f(x) = x + 2$

$y = x + 2 \rightarrow y - 2 = x \rightarrow f^{-1}(x) = x - 2$

6. Calcula la funció inversa de $f(x) = \sqrt{3x - 1}$

$y = \sqrt{3x-1} \rightarrow y^2 = 3x - 1 \rightarrow \dfrac{y^2+1}{3} = x \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+1}{3}$

7. Calcula la funció inversa de $f(x) = \dfrac{5}{x+2}$

$y = \dfrac{5}{x+2} \rightarrow x + 2 = \dfrac{5}{y} \rightarrow x = \dfrac{5}{y} - 2 \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{5}{x} - 2$

8. Calcula la funció inversa de $f(x) = 3x^2 + 2$

$y = 3x^2 + 2 \rightarrow \dfrac{y-2}{3} = x^2 \rightarrow \sqrt{\dfrac{y-2}{3}} = x \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{3}}$

9. Calcula la funció inversa de $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

$y = \sqrt{x^2+1} \rightarrow y^2 = x^2 + 1 \rightarrow \sqrt{y^2-1} = x \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x^2-1}$

10. Calcula la funció inversa de $f(x) = \dfrac{3}{x^2-1}$

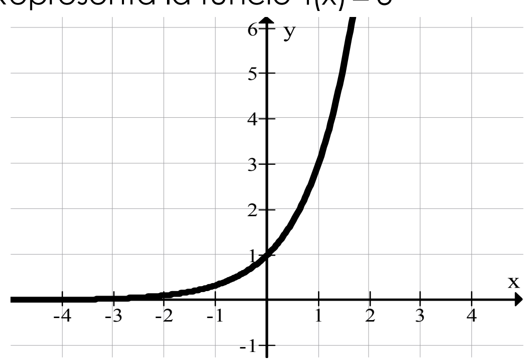
$y = \dfrac{3}{x^2-1} \rightarrow x^2 - 1 = \dfrac{3}{y} \rightarrow x = \sqrt{\dfrac{3}{y}+1} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{3}{x}+1}$

Funcions exponencials

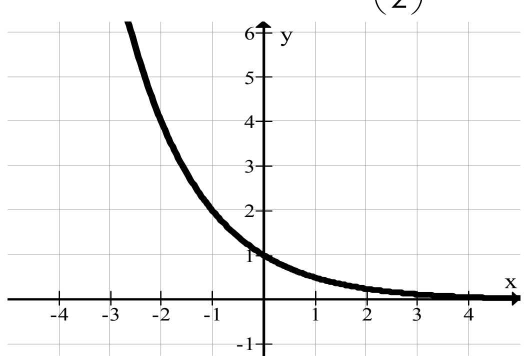
11. Defineix la funció exponencial, representa'n un exemple i digues les seves característiques.

Pàgina 148 del llibre

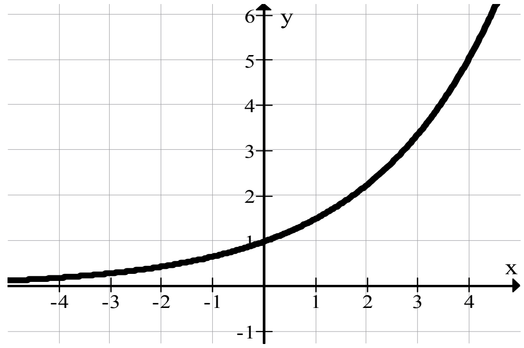
12. Representa la funció $f(x) = 3^x$



13. Representa la funció $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$



14. Representa la funció $f(x)=1'5^x$



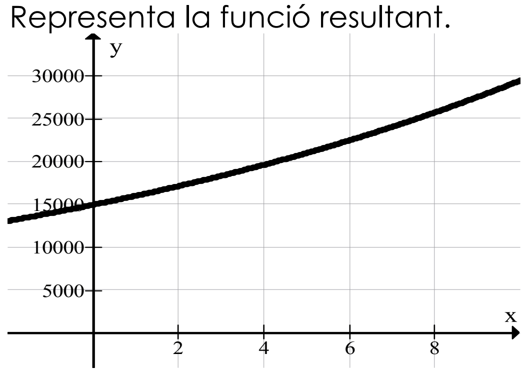
15. N'Olga ingressa 15.000€ en un dipòsit que li dona el 7% d'interès anual. Calcula:

a. El capital que tindrà d'aquí a 6 anys.
$C_f = 15.000 \cdot 1'07^6 = 22.510'96€$

b. La fórmula que ens dona el capital final en funció del temps.
$C_f = 15.000 \cdot 1'07^x$

c. El temps que ha de passar per tenir més del doble.
$30.000 = 15.000 \cdot 1'07^x \rightarrow x = \log_{1'07} 2 = 10'24$, han de passar 25 anys

d. Representa la funció resultant.



16. El nombre de bacteris d'un cultiu ve donat per la fórmula

$y = 15 \cdot 2^{\frac{x}{8}}$ (y = nombre de bacteris, x = hores). Calcula:

a. Quantes bacteris hi havia en el moment inicial.
15 bacteris

b. El nombre de bacteris després d'un dia.
$y = 15 \cdot 2^{\frac{24}{8}} = 120$ bacteris

c. El temps que ha de passar per tenir més de mil.
$1.000 = 15 \cdot 2^{\frac{x}{8}} \rightarrow \frac{x}{8} = \log_2 \frac{1.000}{15} \rightarrow x = 8\log_2 66'667 = 48'47$ hores

d. Representa la funció resultant.

17. Una població té 650 habitants quan fa 2 anys en tenia 500. Si sabem que el seu creixement s'ajusta a una funció exponencial. Calcula:

a. La fórmula que ens dona el nombre d'habitants en funció del temps.

$y = a \cdot b^x$

$a = 500 \rightarrow y = 500 \cdot b^x$

$x = 2, y = 650 \rightarrow 650 = 500 \cdot b^2 \rightarrow b = \sqrt{\frac{650}{500}} = 1'14$

$y = 500 \cdot 1'14^x$

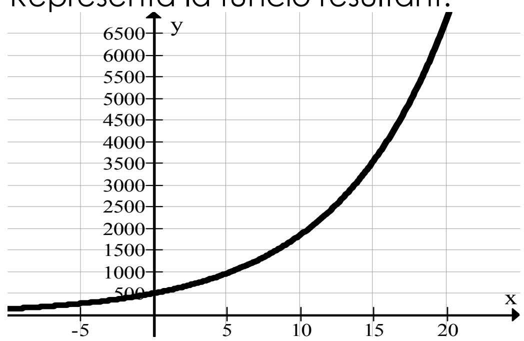
b. La població que tindrà d'aquí a 6 anys.

$y = 500 \cdot 1'14^8 = 1426 \text{ habitants}$

c. El temps que ha de passar per tenir deu vegades més població.

$6.500 = 500 \cdot 1'14^x \rightarrow x = \log_{1'14} \frac{6.500}{500} = \log_{1'14} 13 = 19'58$, han de passar 20 anys

d. Representa la funció resultant.



18. L'any 1997 vaig comprar un pis per 90.000€. Al 2003 hem van oferir 215.000€. Suposant que l'increment del preu de l'habitatge s'ha ajustat a una funció exponencial. Calcula:

a. La fórmula que ens dona el preu del pis en funció de l'any.

$y = a \cdot b^x$

$a = 90.000 \rightarrow y = 90.000 \cdot b^x$

$x = 5, y = 215.000 \rightarrow 215.000 = 90.000 \cdot b^5 \rightarrow b = \sqrt[5]{\frac{215.000}{90.000}} = 1'19$

$y = 90.000 \cdot 1'19^x$

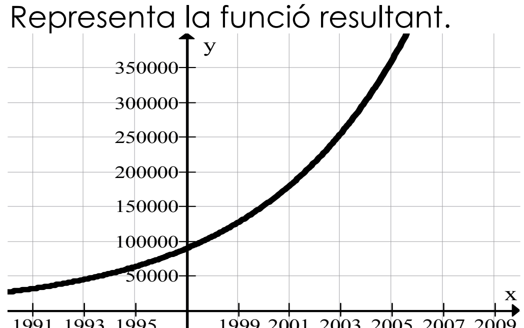
b. Quant podria demanar enguany pel pis?

$y = 90.000 \cdot 1'19^9 = 430.690'37€$

c. Quan el podria haver comprat per menys de la meitat?

$45.000 = 90.000 \cdot 1'19^x \rightarrow x = \log_{1'19} \frac{45.000}{90.000} = \log_{1'19} 0'5 = -3'98 \approx -4$, al 1993

d. Representa la funció resultant.

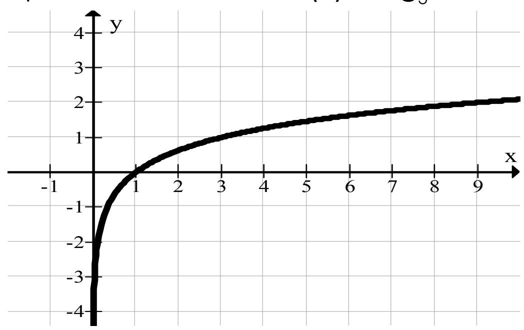


Funcions logarítmiques

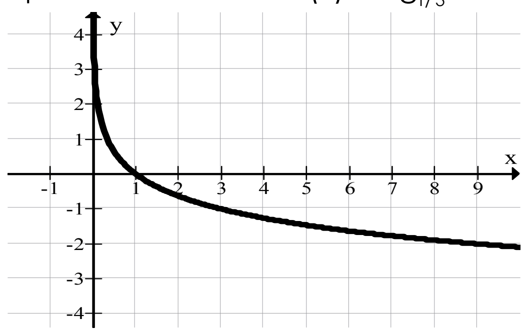
19. Defineix la funció logarítmica, representa'n un exemple i digues les seves característiques.

Pàgina 149 del llibre

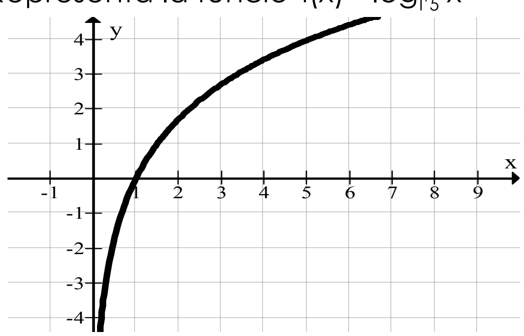
20. Representa la funció $f(x)=\log_3 x$



21. Representa la funció $f(x)=\log_{1/3} x$



22. Representa la funció $f(x)=\log_{1'5} x$



Funcions trigonomètriques

23. Representa la funció $f(x)=\sin x$ i digues les seves característiques.

Pàgina 143 del llibre

24. Representa la funció $f(x)=\cos x$ i digues les seves característiques.

Pàgina 144 del llibre